LAVORO DI MATEMATICA

1. Calcola le seguenti somme:
   (a) $\frac{3}{25}+\frac{9}{25^2}+\frac{27}{25^3}+\frac{81}{25^4}+.......$
   (b) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{4}{9}+\frac{1}{8}+\frac{8}{27}+......$

2. Dimostra che la successione di termine generale:
$$a_n=\frac{4n+1}{n+3}$$
   è crescente.

3. Calcola la somma dei termini della seguente successione:
$$5+\frac{5}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{5}{2^{20}}$$

4. Dimostra che per ogni $n\in\mathbb{N}$ il numero 7^n-1 è divisibile per 6.

5. Dimostra che per ogni $n,m\in\mathbb{N}$ il numero $(m+1)^n-1$ è divisibile per m.

6. Dimostra che se $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{2n+1}{n+1}$, allora:
$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}=\frac{2n+3}{n+2}$$
   Puoi concludere che la formula $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{2n+1}{n+1}$ è vera per ogni numero naturale n maggiore di 0? Perché?

7. Una palla viene lasciata cadere da un'altezza h. Supponendo che la palla perda il 15% dell'energia a ogni urto con il terreno, studia l'evoluzione dell'altezza della palla dal suolo all'aumentare del numero di urti, determinando una legge analitica che rappresenti la variazione dell'altezza della palla dal suolo.

8. Dimostra che $2^0+2^1+2^2+...+2^{n-1}=2^n-1$

9. In un'urna ci sono n palline bianche e $2n$ palline rosse $(n\geq1)$. Si estraggono due palline a caso, senza reimbussolamento. Calcola la probabilità p_n di ottenere due palline di colore diverso. Stabilisci se p_n aumenta con il crescere di n.

10. Dai dati statistici relativi alla vita lavorativa di un dipendente di una certa ditta, emerge il seguente andamento:
    - la prima settimana dell'anno il dipendente non è assente;
    - se il dipendente non è assente nella n-esima settimana dell'anno, sarà assente con probabilità $0,04$ nella $n+1$-esima settimana;
    - se il dipendente è assente nella n-esima settimana dell'anno, sarà assente con probabilità $0,24$ nella $n+1$-esima settimana;

    Sia E_n l'evento :"il dipendente è assente dal lavoro nella n-esima settimana dell'anno" e sia p_n la probabilità di E_n $(n\in\mathbb{N},\ n\geq1)$.
    (a) sapendo che il dipendente è assente la terza settimana dell'anno, determinare la probabilità che egli sia stato assente anche la seconda settimana;
    (b) dimostrare che $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq1,\quad p_{n+1}=0,2p_n+0,04$
    (c) mostrare che la successione $q_n=p_n-0,05$ è una progressione geometrica di cui si chiede la ragione, il termine iniziale e la definizione mediante il termine generale.

11. In un riferimento cartesiano ortogonale è data una famiglia di cerchi C_n di centri $P_n=(4-\frac{3}{2^n},0)$ e raggi $r_n=\frac{1}{2^n}$.
    (a) disegnare i cerchi C_1,C_2,C_3 e C_4;
    (b) trovare le equazioni delle due rette tangenti a tutti i cerchi della famiglia;
    (c) esprimere la trasformazione che manda C_n in C_{n+1};
    (d) trovare l'area della figura formata dall'unione di tutti i cerchi della famiglia.