COMPITO DI MATEMATICA
classe 4 H
10 ottobre 2023

Risolvi i seguenti esercizi nell'ordine che preferisci. Indica chiaramente il riferimento all'esercizio che intendi affrontare. Gli esercizi devono essere svolti con la penna; solo i grafici e i disegni possono essere tracciati con il lapis.

1. Dopo aver espresso in modo preciso come si definisce una successione crescente, stabilisci se la successione $a_n = \frac{2n-5}{n+4}$ è crescente, motivando in modo esauriente la risposta.
2. In una stanza vi sono 6 persone le cui età sono in progressione aritmetica. Sapendo che il più giovane ha 20 anni e che la somma di tutte le età è pari a 165, calcola l'età delle altre persone.
3. In una progressione geometrica a_n, con $n \in \mathbb{N}$ si ha $\frac{a_2}{a_0} = \frac{1}{9}$ e $a_2 \cdot a_3 = \frac{5^2}{3^5}$.
   (a) esprimi la progressione mediante il suo termine generale;
   (b) calcola la somma dei primi dieci termini della successione.
4. Considera la seguente successione assegnata per ricorrenza:
$$\begin{cases} a_0 = h \\ a_1 = k \\ a_{n+1} = a_n - a_{n-1} \end{cases}$$
   dimostra che si tratta di una successione periodica, di cui si chiede di calcolare il periodo (cioè il minimo numero di passi necessario a ritrovare una sequenza già ottenuta).
5. Sia a_n la successione così definita:
$$\begin{cases} a_0 = 10 \\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 1 \end{cases}$$
   (a) la sucessione così definita è una progressione aritmetica? è una progressione geometrica?
   (b) sia b_n la successione definita nel modo seguente: $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_n - 3$; dimostra che b_nè una progressione geometrica;
   (c) trova il termine generale di b_n e di a_n.
6. E' data la successione definita per ricorrenza:
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 8 \\ a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1} \ \ \forall n \geq 1 \end{cases}$$
   (a) calcola i termini a_2, a_3, a_4 e a_5 della successione;
   (b) dimostra per induzione che per ogni intero naturale $n \in \mathbb{N}$ $a_n = (1 + 3n)\, 2^n$
7. In un riferimento cartesiano ortogonale xOy , è data la retta di equazione $y = \frac{1}{3}x + 1$. Costruire il triangolo rettangolo OA_0A_1 avente il vertice A_0 intersezione della retta data con l' asse delle ascisse e il vertice A_1 intersezione della retta data con l' asse delle ordinate. Condurre per A_1 la perpendicolare alla retta data che incontra l' asse delle ascisse in A_2 e condurre per A_2 la perpendicolare ad A_1A_2 che incontra l' asse delle ordinate in A_3 , e così via, ottenendo una spezzata $A_0A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ i cui vertici di indice dispari appartengono all' asse delle ordinate e quelli di indice pari all' asse delle ascisse.
   (a) dimostrare che le lunghezze dei lati $l_1 = \overline{A_0A_1}$, $l_2 = \overline{A_1A_2}$,..., $l_n = \overline{A_{n-1}A_n}$ della spezzata sono in progressione geometrica e determinarne la ragione;
   (b) calcolare la lunghezza $S_n = \overline{A_0A_1} + \overline{A_1A_2} + ... + \overline{A_{n-1}A_n}$ della spezzata formata dai primi n segmenti della costruiti mediante la procedura descritta.
8. Dimostra per induzione che per ogni intero naturale positivo n vale la relazione:
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$$