LAVORO DI MATEMATICA

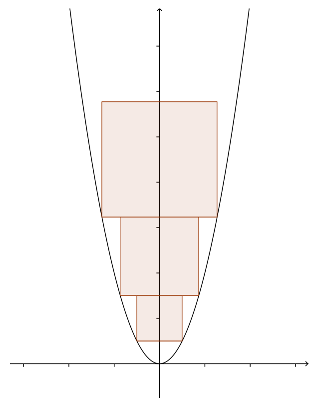
1. Successione convergente, divergente, monotona crescente, monotona decrescente, infinitesima: cerca sul libro il significato esatto di queste espressioni.
2. Utilizzando la definizione di limite di una successione dimostra che valgono le seguenti relazioni:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n-2)^2} = 1$
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \log\left(n^2+1\right) = +\infty$
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{} = 1$
3. Calcola il valore dei seguenti limiti:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+4}{2n^2+3}$
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} n - \sqrt{n^2-1}$
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-n\sin n}{3n^2+\cos n}$
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+7} - \sqrt{n+3}$
   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(3n^2-n\right) - \ln\left(3n^2+n\right)$
   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9+n^2}-3}{\sqrt{121+n^2}-11}$
   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$
   (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+8n}$
4. Calcola il più piccolo intero a partire dal quale vale la disuguaglianza $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} > 12$
5. Stabilisci se le seguenti successioni ammettono limite o no:
   (a) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n+2}$
   (b) $b_n = (-1)^n \frac{n+1}{n+2}$
   (c) $c_n = (-1)^n - (-1)^{n^2}$
   (d) $d_n = \frac{n+\sin n}{n-\cos n}$
   (e) $e_n = \frac{\sin(n!)\cdot\sqrt{n}}{2n+1}$
   (f) $f_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{\binom{n+1}{n-1}}$
6. Il numero $\frac{2}{3}$ è un termine della successione $a_n = \frac{2n+1}{3n+1}$?
7. Data la successione $a_n = \frac{1}{n}$, qual è il minimo valore sdell'indice n per cui la differenza fra il termine a_n e il termine a_{n+1}è minore di 10^{-3}?
8. Sia a_n tale che $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Le seguenti affermazioni sono vere o false?
   (a) a_n è una successione crescente;
   (b) ci sono infiniti termini positivi;
   (c) $a_n < 1,01$ da un certo punto in poi.
9. Dimostra che se una successione a_n tende al limite finito $k > 0$, allora $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{k}$ (ovviamente occorre cautelarsi rispetto al fatto che il denominatore a_n possa annullarsi...)
10. Dimostra che se una successione è convergente, allora $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = 0$

11. Dato il triangolo equilatero di lato a e considerati i punti medi dei lati, si costruisca il triangolo equilatero che ha tali punti medi come vertici. Si ripeta la costruzione considerando i punti medi del triangolo equilatero ottenuto e così si prosegua indefinitamente. Si calcoli la somma dei perimetri e delle aree degli infiniti triangoli equilateri così ottenuti.

12. In un riferimento cartesiano ortogonale disegna il grafico della parabola di equazione $y = x^2$. Inscrivi in tale grafico un quadrato Q_0 avente i lati paralleli agli assi cartesiani. Il lato di questo quadrato è $l_0 = 2$. A partire da Q_0 costruisci una successione di quadrati $Q_n$di lato l_n, inscritti nel grafico della parabola e tali che il lato inferiore di Q_{n+1} stia sulla retta cui appartiene il lato superiore di Q_n.

    (a) verifica che $l_{n+1} = \sqrt{l_n^2 + 4l_n}$;

    (b) calcola il limite del rapporto fra le aree di Q_{n+1}e Q_n per $n \to \infty$;



    (c) calcola $\lim_{n\to\infty} l_{n+1} - l_n$

    (d) esiste un'omotetia che trasforma Q_0 in Q_1? Esiste una similitudine che che trasforma Q_0 in Q_1? Nel caso che una o ambedue le trasformazioni esistano, scrivine le equazioni analitiche.

13. In un gioco di fortuna c'è un barattolo contenente n biglietti, con $n \geq 3$. Si sa che fra tutti i biglietti ce ne sono esattamente 2 che danno diritto a vincere un premio.

    (a) calcola la probabilità p_n di ottenere esattamente un biglietto vincente se si estraggono dal barattolo due biglietti contemporaneamente, e la probabilità q_n di ottenere esattamente un biglietto vincente se si estrae dal barattolo un biglietto, lo si reimbussola e se ne estrae un altro.

    (b) sia $a_n = p_n - q_n$. Dimostra che a_n è definitivamente decrescente (trovare il valore k a partire dal quale l'andamento della successione diventa monotono);

    (c) calcola $\lim_{n\to\infty} p_n - q_n$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$;

    (d) supponiamo che si estraggano dal barattolo uno dopo l'altro i biglietti, senza reimbussolare, fino a quando non arriva il primo biglietto vincente. Qual è la probabilità che ciò avvenga esattamente alla k-esima estrazione (dove k è un intero minore di n)?