ESERCIZI

Parte A

(1) Abbiamo parlato di diagonale del cubo. Potremo parlare in generale di diagonale di un poliedro.
Fra le seguenti una sola è una buona definizione di **diagonale di un poliedro**; quale? Prova a giustificare la tua scelta.

a è il segmento che unisce due vertici;

b è il segmento che unisce due vertici che non sono estremi di uno stesso spigolo;

c è il segmento che unisce due vertici che non appartengono alla stessa faccia.

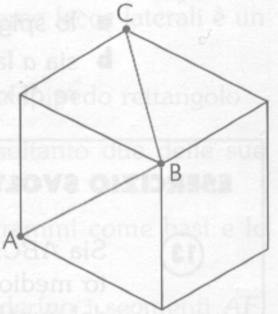
(2) Si consideri il cubo della Fig. 1.

a Quali fra i segmenti AF, AG, AD è diagonale del cubo?

b Consideriamo due diagonali di un cubo, sono perpendicolari?

c Se lo spigolo del cubo misura a, qual è la misura della sua diagonale?

(3) AB e BC sono due diagonali delle facce di un cubo.
Quanto misura l'angolo $A\hat{B}C$?
$\boxed{A}$ 90° $\boxed{B}$ 120° $\boxed{C}$ 60°.
$\boxed{D}$ 45° $\boxed{E}$ nessuna delle precedenti risposte è corretta.
(Olimpiadi di matematica – 1992).



(4) Considerando il poliedro che si ottiene dall'unione di due tetraedri regolari con una faccia in comune, possiamo dire che è ancora un poliedro regolare?

(5) Dato il cubo della Fig. 1, pensiamo al tetraedro $BDEG$ come piramide; sia a la misura dello spigolo del cubo.

a Quanto misurano le quattro altezze del tetraedro?
Basta pensare al volume del tetraedro e all'area delle sue facce.

b In che punto della faccia BDE cade l'altezza uscente dal vertice G?

c Qual è il piede dell'altezza della piramide $ABDE$ che esce dal vertice A?

d Perché possiamo concludere che la diagonale AG del cubo è perpendicolare al piano BDE (ossia al piano che contiene la faccia BDE)?

e Qual è l'altro piano, passante per tre vertici del cubo, che è perpendicolare alla diagonale AG?

(6) Quali piani, sempre passanti per tre vertici del cubo considerato all'inizio, sono perpendicolari alla diagonale BH? Ripetere la ricerca per le altre diagonali del cubo.
Quale può essere il criterio che consente di individuare, volta per volta i tre vertici richiesti?

(7) È vero che se due piani hanno in comune una retta e un punto esterno alla retta allora coincidono? Giustificare la risposta con un ragionamento.

(8) Sia dato un tetraedro regolare $ABCD$ e siano M e N i rispettivi punti medi degli spigoli AB e BD. Il piano α, individuato dai punti D, C, M, e il piano β, individuato da A, C, N, hanno il punto C in comune. Qual è la retta secondo cui i due piani si secano?

(9) Perché un tavolino a quattro gambe talvolta traballa, mentre uno a tre gambe non traballa mai?

(10) Sia $ABCD$ un tetraedro regolare il cui spigolo misura 12 (cm). Calcolare l'area della figura ottenuta sezionando il tetraedro con il piano passante per lo spigolo CD e per il punto medio M del lato AB.

(11) Descrivere la figura ottenuta sezionando il cubo di Fig. 1 con il piano passante per A e per C e per i punti medi degli spigoli EF e FG. Calcolare l'area della suddetta sezione nel caso che lo spigolo del cubo sia di 12 (cm).

(12) Descrivere la figura ottenuta come sezione del cubo di Fig. 1 con il piano passante per M, N, P, Q, punti appartenenti rispettivamente agli spigoli AD, CD, GH, EH e tali che

$$\overline{DM} = \overline{DN} = \overline{GP} = \overline{EQ}$$

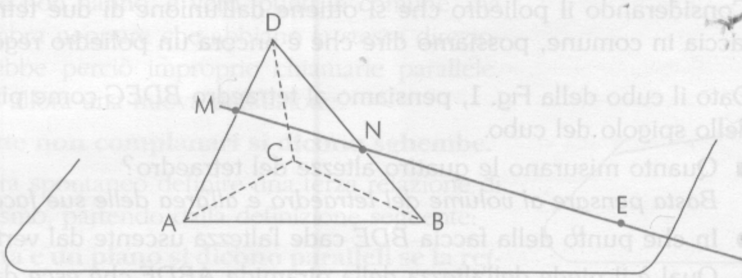
Determinare inoltre l'area della sezione nel caso che:

a lo spigolo del cubo sia di 12 cm e $\overline{DM} = \overline{DN} = \overline{GP} = \overline{EQ} = 3$ (cm)

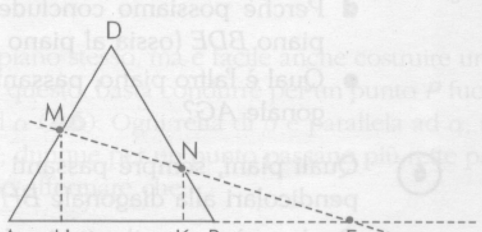
b sia a la misura dello spigolo del cubo e $\overline{DM} = \overline{DN} = \overline{GP} = \overline{EQ} = x$. Per quale valore di x l'area risulta massima? per quale minima?

ESERCIZIO SVOLTO

(13) Sia $ABCD$ il tetraedro regolare che ha lo spigolo di 12 (cm); inoltre siano M il punto medio di AD e N il punto di BD con $\overline{BN} = 4$ cm. Calcolare la distanza da B del punto E in cui la retta MN incontra il piano della faccia ABC.



La retta MN appartiene al piano ABD (piano α) poiché due dei suoi punti appartengono a questo piano. Il punto E, allora, è un punto del piano α e, poiché deve appartenere anche al piano della faccia ABC (piano β), sarà un punto della retta AB, intersezione fra α e β.



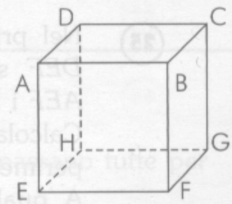
Tutto avviene dunque nel piano α. Siamo ricondotti a un problema di geometria piana.
Se H e K sono le rispettive proiezioni di M e di N sulla retta AB si ha:

$$\overline{MH} = \frac{\overline{AM}\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \quad \overline{NK} = \frac{\overline{BN}\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \quad \overline{AH} = 3 \quad \overline{BK} = 2$$

(le misure sono espresse in centimetri).
I triangoli HME e KNE sono simili; posto $\overline{BE} = x$

$$\frac{\overline{HE}}{\overline{KE}} = \frac{\overline{MH}}{\overline{NK}} \ ossia \ \frac{9+x}{2+x} = \frac{3}{2}, \ 2(9+x) = 3(2+x), \ x = 12$$

14 Lo spigolo del cubo rappresentato in figura misura 18 (cm); sia P il punto dello spigolo EH che dista 6 (cm) da E.
Indicati rispettivamente con R e con S i punti in cui il piano individuato da C, D, P incontra le rette AE e BF, calcolare l'area del quadrilatero $CDRS$.



15 Dopo quanto abbiamo visto, come si può definire un prisma?

16 Un prisma può essere un poliedro regolare?

17 Un prisma retto che ha esagoni regolari come basi e quadrati come facce laterali è un poliedro regolare o no? perché?

18 Formulare una definizione per il parallelepipedo e per il parallelepipedo rettangolo

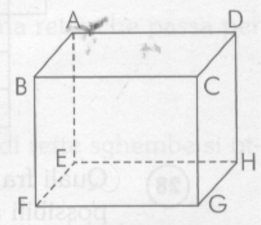
19 In un parallelepipedo possono essere considerate come basi soltanto due delle sue facce?

20 Quale denominazione dare a un prisma che ha due parallelogrammi come basi e le altre facce rettangolari?

21 Nel parallelepipedo rettangolo rappresentato in figura si considerino i segmenti AF, AG, AH.
Gli angoli $A\widehat{F}E$ e $A\widehat{G}F$ hanno rispettivamente ampiezza $\pi/3$ e $\pi/4$ e la somma di tutti gli spigoli del parallelepipedo è di 48 cm. Calcolare:

a la misura di ciascun spigolo del parallelepipedo

b l'area del triangolo AHG

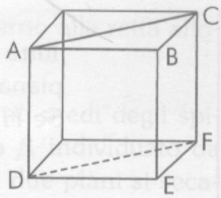


22 Un prisma retto ha come basi i triangoli ABC e DEF isosceli e rettangoli rispettivamente in B e in E ed ha l'altezza uguale ai cateti della base. Sapendo che il perimetro di base è di 18 (cm), calcolare l'area del triangolo AEC.

Per **altezza di un prisma** *si intende la lunghezza del segmento di perpendicolare compreso fra i piani delle due basi.*

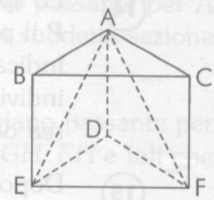
23 Considerare il prisma retto che ha come basi i triangoli ABC e DEF rettangoli rispettivamente in B e in E e con $\sphericalangle(B\widehat{C}A) = \sphericalangle(E\widehat{F}D) = \pi/3$ ed ha l'altezza uguale al cateto minore della base. Sapendo che il perimetro della base è di 18 (cm), calcolare l'area del triangolo AEC.

(24) Il prisma $ABCDEF$ è stato ottenuto sezionando un cubo con il piano passante per due spigoli paralleli non appartenenti alla stessa faccia.
Calcolare il volume del prisma sapendo che l'area della sua superficie totale è $(27 + 9\sqrt{2})$ (cm^2).
Disegnare la figura piana, sviluppo della superficie del prisma, ottenuta "tagliando" tale superficie lungo tutti gli spigoli uscenti da E e da B.

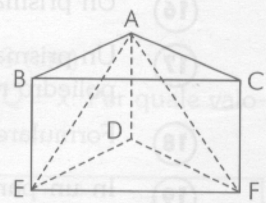


> *Una superficie tridimensionale si dice* **sviluppabile** *se tale superficie, dopo tagli opportuni operati su di essa, può esser distesa su un piano. La figura piana ottenuta, che deve essere* **semplicemente connessa** (ossia costituita da un unico pezzo) *si dice* **sviluppo** *della figura di partenza.*

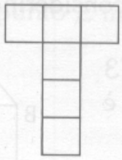
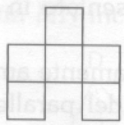
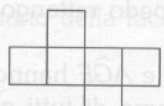
(25) Nel prisma retto rappresentato in figura le basi ABC e DEF sono triangoli equilateri e nel triangolo isoscele AEF i lati AE e AF misurano il doppio della base EF.
Calcolare il volume della piramide $EDFA$ sapendo che il perimetro di AEF è di 40 (cm).
A quale tipo di poliedri appartiene il solido di vertici $ABCFE$? Quanto misura la sua altezza?



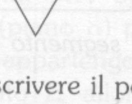
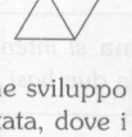
(26) La figura rappresenta un prisma retto le cui basi ABC e DEF sono triangoli isosceli rettangoli rispettivamente in A e in D, mentre il triangolo AEF è equilatero.
Calcolare l'area della superficie totale e il volume del poliedro che ha come vertici i punti A, B, C, F, E, sapendo che il perimetro di AEF è di 36 (cm).



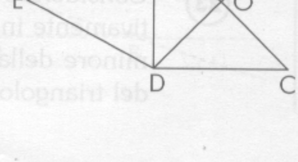
(27) Quali fra le figure seguenti rappresentano lo sviluppo di un cubo? Sono possibili altri sviluppi? In caso affermativo disegnarli.

A

B

C

D


(28) Quali fra le figure seguenti rappresentano lo sviluppo di un tetraedro regolare? Sono possibili altri sviluppi? Se sì, disegnarli.

A

B

C

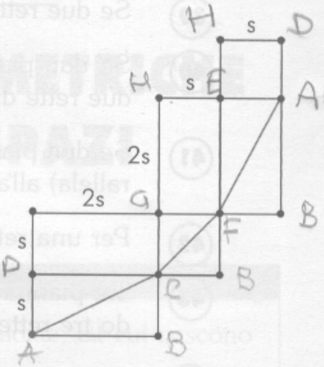

(29) **a** Descrivere il poliedro che ha come sviluppo della sua superficie la figura qui rappresentata, dove i segmenti AC e BD sono perpendicolari e uguali, O è il loro punto medio ed è $\overline{AE} = \overline{DE} = \overline{AD}$.
b Possiamo affermare che il solido presenta spigoli perpendicolari alle facce?



c Che relazione intercorre fra il solido considerato e un cubo?

d Determinare il volume del solido in funzione di a, dove $a = \overline{AD}$.

(30) La figura che segue rappresenta uno sviluppo di un poliedro; tale sviluppo è dato dall'unione di rettangoli e di quadrati le cui dimensioni sono indicate in figura. La linea spezzata colorata rappresenta il contorno di una sezione del poliedro. Descrivere brevemente il poliedro e calcolare l'area della sezione considerata.



Parte B

ESERCIZIO SVOLTO

(31) Se più rette sono tali che due qualunque di esse si tagliano, o passano tutte per uno stesso punto o stanno tutte su uno stesso piano.

Siano ***a*** e ***b*** due rette dell'insieme considerato e indichiamo con O il loro punto comune; le due rette ***a*** e ***b*** giacciono su un piano π (**T2**). Per le altre rette dell'insieme si presentano due casi:

a passano tutte per O;

b almeno una di esse, retta **c**, non passa per O. I punti in cui la retta ***c*** incontra ***a*** e ***b*** appartengono a π, perciò anche **c** e tutte le rette dell'insieme che non passano per O stanno su π (**A3**). Eventuali altre rette che passano per O devono incontrare **c** in un punto che sarà distinto da O; queste rette contengono allora due punti di π e giacciono perciò su questo piano.

(32) Due rette che tagliano in punti distinti rette sghembe sono sghembe.

(33) Date due rette sghembe ed un punto P fuori di esse, costruire una retta che passa per P ed è complanare con entrambe.
Ricordare **T1**

(34) I quattro punti A, B, C, D non sono complanari. Quante coppie di rette sghembe si ottengono congiungendoli due a due?

(35) Una retta è parallela a un piano se e solo se è parallela a una retta del piano.
Si tratta di dimostrare:

- *se una retta è parallela a una retta di un piano allora è parallela al piano;*
- *se una retta è parallela a un piano allora è parallela ad una retta (almeno) del piano.*

In entrambi i casi si deve tenere conto che la retta può appartenere al piano o essere ad esso esterna

(36) Se la retta ***r*** è parallela al piano α, ogni piano che passa per ***r*** e che non è parallelo ad α taglia α secondo una retta ***s*** parallela ad ***r***.

(37) Se la retta ***r*** è parallela al piano α, la parallela a ***r*** condotta per un punto P di α, giace su α.

(38) Se due rette sono parallele ogni piano che passa per l'una è parallelo all'altra.

(39) Se due rette sono parallele ogni piano che incontra l'una incontra anche l'altra.

(40) Se due piani sono paralleli ogni piano che incontra l'uno incontra anche l'altro e le due rette di intersezione sono parallele.

(41) Se due piani sono paralleli ogni retta incidente (o parallela) all'uno è incidente (o parallela) all'altro.

(42) Per una retta parallela ad un piano α passa uno e un sol piano parallelo ad α.

(43) Tre piani a due a due incidenti e non passanti per uno stesso punto si tagliano secondo tre rette fra loro parallele.

(44) Per un punto P fuori dal piano α si conducono le parallele $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ a due rette secanti di α: allora il piano di $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ è parallelo ad α.

(45) Date due rette sghembe, esiste uno e un sol piano passante per una di esse e parallelo all'altra. Dimostrare che i piani per le due rette, così costruiti, sono paralleli.
Considerare una retta incidente a una delle due rette sghembe e parallela a....

(46) Se due piani sono incidenti, ogni piano incidente ad entrambi e parallelo alla loro intersezione, taglia i due piani secondo due rette parallele.

(47) Per un punto esterno a due piani incidenti condurre la retta parallela a entrambi. Perché questa parallela è unica?

(48) Per un punto P fuori di un piano α condurre la retta parallela ad α e complanare ad una retta assegnata $\boldsymbol{r}$.

VOCABOLI E SIMBOLI

PARTE A

- poliedro - vertici, spigoli, facce, superficie (di un poliedro)
- poliedro regolare
- cubo o esaedro regolare
- tetraedro - tetraedro regolare
- rette incidenti, parallele, sghembe
- perpendicolarità retta - piano
- individuare - esistenza di uno e un solo....
- piani incidenti o secanti - piani paralleli
- sezionare - figure sezione
- prisma
- basi, facce laterali (di un prisma)
- prisma retto
- parallelepipedo - parallelepipedo rettangolo
- altezza (di un prisma e di una piramide)
- sviluppo
- direzione

PARTE B

- giacere (sul piano)
- allineamento
- complanarietà
- rette incidenti, parallele, sghembe
- individuare - esistenza di uno e un solo....
- piani incidenti o secanti - piani paralleli
- relazione di equivalenza - partizione - insieme quoziente
- direzione
- giacitura